カンドルの距離について

立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数理科学コース
岩本 光平 (Kohei IWAMOTO) *

概 要

カンドルは群における共役演算を一般化した代数系であり, 結び目理論や対称空間論の観点から盛んに研究されている. 一方, これらの研究では, カンドルに有限性を仮定する場合がほとんどであり, 無限カンドルを直接研究するための枠組みや手法は十分に確立されていない. 本講演では幾何学的群論のアイデアに基づき, 先行研究で用いられたものとは異なる新たな距離を無限カンドルに導入する. また, ユークリッド空間および双曲平面と擬等長同型なカンドルの例を紹介する. 本講演の内容は, 甲斐涼哉氏 (大阪公立大学), 児玉悠弥氏 (鹿児島大学) との共同研究に基づく.

1 導入

カンドルは, ジョイス [4] により, 結び目理論の研究を起源に導入された代数系である. カンドルの公理は, 結び目図式におけるライデマイスター変形と呼ばれる局所的な変形操作と対応している. 一方, 結び目理論だけでなく, カンドルはさまざまな数学の分野で活発に研究されている. たとえば, 各点において点対称をもつ対称空間がある. カンドルは対称空間の一般化として考えられており, 対称空間論の立場からカンドルが研究がされている [3, 9]. 一方, 結び目理論における不変量や彩色, あるいは対称空間に関するカンドルの研究では, 有限カンドルを扱う場合がほとんであり, 無限カンドルを直接研究するための理論的枠組みや手法はまだ十分に確立されていない.

幾何学的群論では, 群を幾何学的な視点から研究され, 無限群, 特に有限生成の無限群が主な研究対象である. 有限生成群とその有限生成集合の組からケイリーグラフが定義され, そのグラフ構造から有限生成群に距離が導かれる. この距離は一般には生成集合の取り方に依存するが, 等距離性をゆるめた概念である擬等長性を考えると, 生成系の取り方によらずに群から一意的に定まる. したがって, 幾何学的な対象である距離空間の擬等長不変量は, 代数的な対象である有限生成群の不変量とみなせる. 本研究では, この幾何学的群論の枠組みを用いて, 無限カンドルの研究手法を構築することを目標にしている.

本稿では, 無限カンドルに対して 2 種類の距離を扱う. ひとつは, ウィンカー [8] によって与えられた, カンドルの生成集合 A によって定まるグラフから導かれる距離 d_A^W である. 有限生成カンドルに対して, 有限生成集合 A の取り方によらずに, d_A^W の擬等長類が定まることを示した. さらに, カンドルに自然に作用する変位の群とその生成集合 U を用いて, 距離 d_U を定義する. また, 変位の群が有限生成であるカンドルに対して, 変位の群の有限生成集合 U によらず, この距離 d_U は擬等長同型のもとで, 一意的に定まる. 特に, 変位の群が有限生成であるような有限生成カンドルは, 2 つの距離 d_A^W と d_U から擬等長類がそれぞれ一意的に定まるが, 一般にはこれらの距離 d_A^W と d_U は擬等長同型にならない例を与える. さらに, 変位の群から定まるカンドルの距離に関して, ユークリッド空間や双曲平面と擬等長同型になるカンドルの例を具体的に与える.

*E-mail:ra0061ir@ed.ritsumei.ac.jp

2　準備

まず主結果を述べるためにカンドルと幾何学的群論についてこの節で紹介する．

2.1　カンドル

まずカンドルについて紹介する．詳細は [4, 5] を参照していただきたい．

定義 2.1 ([4])**.** 空でない集合 Q 上の二項演算 $\triangleleft : Q \times Q \to Q$ が次を満たすとき，$(Q, \triangleleft)$ を**カンドル**という．

1. 任意の $x \in Q$ に対して $x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in Q$ に対して, $s_y(x) = x \triangleleft y$ で定義される写像 $s_y : Q \to Q$ は全単射,
3. 任意の $x, y, z \in Q$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

また, $(Q, \triangleleft)$ の演算が明示的なときには Q とあらわす．全単射 $s_y : Q \to Q$ を y における点対称という．本稿では，$x, y, z \in Q$ に対して，

$$x \triangleleft^{-1} y := s_y^{-1}(x), \quad x \triangleleft y \triangleleft z := (x \triangleleft y) \triangleleft z.$$

とかく．カンドル $(Q, \triangleleft)$ の部分集合 Q' に関して, 演算 $\triangleleft$ とその逆演算 $\triangleleft^{-1}$ の両方の下で Q' が閉じているとき, Q' を Q の**部分カンドル**と呼ぶ.

定義 2.2. $(Q, \triangleleft)$, $(Q', \triangleleft')$ をカンドルとする．写像 $f : Q \to Q'$ が，任意の $x, y \in Q$ に対して, $f(x \triangleleft y) = f(x) \triangleleft f(y)$ を満たすとき, **カンドル準同型写像**という．カンドル準同型写像 $f : Q \to Q'$ が全単射であるとき, 写像 f を**カンドル同型写像**という．Q と Q' の間にカンドル同型写像が存在するとき, Q と Q' は**カンドルとして同型**であるという．

Q の自己同型写像全体 $\mathrm{Aut}(Q)$ に $fg := g \circ f$ によって群構造を与え，この群を Q のカンドル自己同型群という．この群は $x \cdot f := f(x)$ によってカンドル Q に右から作用する．

定義 2.3. $\mathrm{Aut}(Q)$ が推移的に作用するカンドル $(Q, \triangleleft)$ を**等質カンドル**という．

各点の点対称 $s_y : Q \to Q$ は Q の自己同型写像となる．

定義 2.4. $(Q, \triangleleft)$ をカンドルとする．点対称たち $\{s_y \in \mathrm{Aut}(Q) \mid y \in Q\}$ によって生成される $\mathrm{Aut}(Q)$ の部分群を**内部自己同型群**とよび, $\mathrm{Inn}(Q)$ と表す．

$\mathrm{Inn}(Q)$ の作用を用いてカンドルに連結性が定義される．

定義 2.5. $\mathrm{Inn}(Q, \triangleleft)$ の作用による $x \in Q$ の軌道を Q の x を含む**連結成分**という．特に，$\mathrm{Inn}(Q)$ が推移的に作用しているカンドル $(Q, \triangleleft)$ を**連結カンドル**という．

次の群は，カンドル構造から一意的に定まり，さらにカンドル自身への作用は良い性質を持つ (詳細は，[2] を参照していただきたい)．

定義 2.6 ([4, 2, 9])**.** カンドル $(Q, \triangleleft)$ に対して, 以下の群を**変位の群**という．

$$\mathrm{Dis}(Q) := \left\langle s_x \circ s_y^{-1} \mid x, y \in Q \right\rangle_{\mathrm{Grp}}.$$

つぎに, カンドルの具体例について紹介する.

例 2.7. 群 G は $x \triangleleft y := y^{-1}xy(x, y \in Q)$ によってカンドルとなる. これを G の**共役カンドル**といい, $\mathrm{Conj}(G)$ とかく.

例 2.8. $n \geq 2$ とする. このとき, $x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して,

$$x \triangleleft y := 2y - x$$

で二項演算 $\triangleleft$ を定義すると, $R_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \triangleleft)$ はカンドルとなる. これを**二面体カンドル**という. また, $\mathbb{Z}$ 上に同様の演算を定めたとき, $R_\infty = (\mathbb{Z}, \triangleleft)$ を**無限二面体カンドル**という.

例 2.9. G を群とし, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ を群 G の自己同型写像とする. このとき群 G 上の二項演算を $x \triangleleft y := \psi(xy^{-1})y$ と定める. このとき, $\mathrm{GAlex}(G, \psi) = (G, \triangleleft)$ はカンドルとなる. このカンドル $\mathrm{GAlex}(G, \psi)$ を**一般化アレクサンダーカンドル**という. 特に, G が可換群のとき $\mathrm{GAlex}(G, \psi)$ をアレクサンダーカンドルという.

2.2 擬等長同型と有限生成群のケイリーグラフ

次に, 距離空間の擬等長同型, および有限生成群のケイリーグラフについて紹介する. 幾何学的群論では, ケイリーグラフの擬等長不変量を用いて (有限生成無限) 群が研究される. 詳しくは [6, 7] を参照していただきたい.

頂点集合を V, 辺集合を E とする連結グラフ $\Gamma(V, E)$ について, 次のようにして距離が定義される.

定義 2.10. 連結グラフ $\Gamma(V, E)$ の各辺の長さを 1 とする. このとき, グラフの 2 つの頂点 $u, v \in V$ に対して, それらを結ぶ道の長さの最小値を $d(u, v)$ とすると, d は頂点集合 V 上の**距離**を定める.

幾何学的群論, 特に, 有限生成群のケイリーグラフと擬等長同型のアイデアをもとに, カンドルに距離を導入することが本稿の目標である. そのために, 有限生成群のケイリーグラフを紹介する.

定義 2.11. G を有限生成群とし, その有限生成集合を S とする. G の部分集合 S^{-1} を $\{s^{-1} \mid s \in S\}$ とする. ただし, S は単位元 1 を含んでないと仮定する. このとき, 無向グラフ $\mathrm{Cay}(G, S)$ を以下の頂点集合 V および辺集合 E を持つグラフとして定義する.

- 頂点集合 $V = G$,
- 辺集合 $E = \{(g, gs) \ \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1}\}$.

このとき, $\mathrm{Cay}(G, S)$ を **G の S に関するケイリーグラフ**という.

有限生成群とその生成集合からケイリーグラフを考え, このグラフに距離 (定義 2.10) が定まり, 距離空間が得られる. しかし, これは生成集合の取り方に依存する. そこで生成集合の取り方によらない群の幾何学的性質を得るために, 擬等長同型について紹介する.

定義 2.12. (X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間とする. その間の写像を $f : X \to Y$ とする. ある定数 $\lambda \geq 1$ および $C \geq 0$ が存在して任意の x, y に対して,

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, y) - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C$$

が成り立つとき, 写像 f は**擬等長埋め込み**であるという.

定義 2.13. ある定数 $\lambda \geq 0$ が存在して，任意の $y \in Y$ に対して，ある $x \in X$ が存在して $d_Y(f(x), y) \leq \lambda$ が成り立つとき, 写像 f は**粗稠密**であるという.

定義 2.14. 距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) の間の写像 $f : X \to Y$ が擬等長埋め込みかつ粗稠密であるとき f を**擬等長同型写像**という. また, 擬等長同型となる写像 $f : X \to Y$ が存在するとき, 2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) は**擬等長同型**であるという.

2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) は擬等長同型であるという関係は同値関係である. 次の事実から有限生成群のケイリーグラフは擬等長同型の差を除いて一意的に定まる.

命題 2.15. 有限生成群 G の有限生成集合を S, T とする. このとき $\mathrm{id} : \mathrm{Cay}(G, S) \to \mathrm{Cay}(G, T)$ は擬等長同型写像である.

ケイリーグラフの擬等長不変量は有限生成群の不変量となる. ここで，擬等長不変量の 1 つであるエンドの数を [7] に従って紹介する.

連結で局所有限なグラフ Γ を考える. ある固定された頂点を中心とする半径 n の球を $\mathcal{B}(n)$ とする. $\|\Gamma\backslash\mathcal{B}(n)\|$ を, $\mathcal{B}(n)$ の補集合 $\Gamma\backslash\mathcal{B}(n)$ の非有界な連結成分の数とする.

定義 2.16. 連結で局所有限なグラフ Γ とする. $e(\Gamma)$ を次で定める.

$$e(\Gamma) = \lim_{n\to\infty} \|\Gamma\backslash\mathcal{B}(n)\|.$$

このとき, $e(\Gamma)$ をグラフ Γ **のエンドの数**という.

グラフ Γ のエンドの数 $e(\Gamma)$ は, 頂点の選び方によらず一意的に定まり, $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ に値をとる. 有限生成群 G のケイリーグラフは連結で局所有限であり，そのエンドの数を有限生成群 G のエンドの数といい，$e(G)$ とかく. 有限生成群のエンドの数は擬等長同型のもとで不変である. エンドの数の概念はより一般的な場合に対して定義される. 詳細は [6] を参照していただきたい.

つぎに, 擬等長同型についての具体例を紹介する.

- $\mathbb{Z}^n$ のケイリーグラフはユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$ と擬等長同型である.
- n 次元双曲閉多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ のケイリーグラフは双曲空間 $\mathbb{H}^n$ と擬等長同型である.

本稿の最後に, 変位の群によるグラフから定まる距離が, ユークリッド空間や双曲平面と擬等長同型なカンドルの例を構成する. その構成のために用いたのが次の命題である.

命題 2.17. G を有限生成群とし, H を G の有限指数部分群であるとする. このとき G と H は擬等長同型である.

注意. 有限生成群の有限指数部分群は, 常に有限生成である.

3　カンドルのグラフ

この節では, カンドルから定まるグラフに対して距離を導入し, 擬等長同型を用いることで得られたいくつかの結果を紹介する. まず, カンドルの生成集合を以下で定義する.

定義 3.1 ([8])**.** カンドル $(Q, \triangleleft)$ に対して, 部分集合 $A \subset Q$ とする. Q の任意の元 x に対して, A の元 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ と符号 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在して,

$$x = a_0 \triangleleft^{\varepsilon_1} a_1 \triangleleft^{\varepsilon_2} \cdots \triangleleft^{\varepsilon_n} a_n$$

が成り立つとき, 部分集合 $A \subset Q$ を**カンドル Q の生成集合**という.

注意. $A \subset Q$ を生成集合とすると, $\{s_a^{\varepsilon} \in \mathrm{Inn}(Q) \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}, a \in A\}$ は $\mathrm{Inn}(Q)$ の生成集合となる. 特に, カンドル Q が有限生成ならば, $\mathrm{Inn}(Q)$ は群として有限生成である.

ウィンカーはカンドルの演算から定まるグラフを定義した [8].

定義 3.2 ([8])**.** $(Q, \triangleleft)$ をカンドルとする. $A \subset Q$ をカンドル Q の生成集合とする. このとき, グラフ $\Gamma_W(Q, A)$ を以下の頂点集合 V および辺集合 E を持つグラフとして定義する.

- 頂点集合 $V = Q$,
- 辺集合 $E = \{(x, x \triangleleft^{\varepsilon} a) \mid x \in Q, \varepsilon \in \{\pm 1\}, a \in A\}$.

本稿では, $\Gamma_W(Q, A)$ を, カンドル Q の有限生成集合 A に関する $\mathrm{Inn}(Q)$ から定まるグラフという. カンドルの連結成分と $\Gamma_W(Q, A)$ のグラフとしての連結成分は 1 対 1 に対応する. また, カンドルの各連結成分には $\Gamma_W(Q, A)$ から距離が導かれる (定義 2.10). この距離を d_A^W とおく. 一般に距離 d_A^W は生成集合 A の取り方に依存するが，有限生成群の場合と同様に，有限生成カンドルは有限生成集合の取り方によらずに擬等長類は一意的に定まる.

定理 3.3. S, T を有限生成カンドル Q の有限生成集合とする. このとき, Q の連結成分 O に対して, $\mathrm{id} : (O, d_S^W) \to (O, d_T^W)$ は擬等長同型写像である.

さらに，変位の群の作用からグラフを定義して，カンドルに別の距離を導入する.

定義 3.4. $(Q, \triangleleft)$ をカンドルとする. $U \subset \mathrm{Dis}(Q)$ を変位の群 $\mathrm{Dis}(Q)$ の生成集合とする. このとき, グラフ $\Gamma(Q, U)$ を以下の頂点集合 V および辺集合 E を持つグラフとして定義する.

- 頂点集合 $V = Q$,
- 辺集合 $E = \{(x, x \cdot u^{\varepsilon}) \mid x \in Q, \varepsilon \in \{\pm 1\}, u \in U\}$.

本稿では，$\Gamma(Q, U)$ を変位の群の有限生成集合 U に関する $\mathrm{Dis}(Q)$ から定まるグラフという. $\Gamma_W(Q, A)$ と同様に, カンドルの連結成分とカンドルの変位の群から定まるグラフとしての連結成分は 1 対 1 に対応し，各連結成分には $\Gamma(Q, U)$ から距離 d_U が導かれる. $\Gamma_W(Q, A)$ と同様に, 変位の群の有限生成集合の取り方によらずに擬等長類が一意的に定まる.

定理 3.5. カンドル Q の変位の群 $\mathrm{Dis}(Q)$ の有限生成集合 U, V をとる. このとき, Q の連結成分 O に対して, $\mathrm{id} : (O, d_U) \to (O, d_V)$ は擬等長同型写像である.

有限生成カンドル (resp. 変位の群が有限生成なカンドル) に対してはグラフ $\Gamma_W(Q, A)$ (resp. $\Gamma(Q, U)$) を用いて，距離空間の擬等長類が一意に定まった. しかし，変位の群が有限生成である有限生成カンドルであっても，これらの距離空間が擬等長同型になるとは限らない.

例 3.6. 無限 2 面体カンドル $R_\infty = (\mathbb{Z}, \triangleleft)$ を考える. R_∞ の連結成分は, 0 を含む O_0 と，1 を含む O_1 からなる. このとき, $A := \{0, 1\} \subset R_\infty$ はカンドルの有限生成集合である. また, $U := \{s_1 \circ s_0^{-1}\}$ は $\mathrm{Dis}(R_\infty)$ の有限生成集合である. このとき, 距離空間 (O_0, d_A) と (O_0, d_U) のエンドの数が異なるため，これらは擬等長同型ではない.

4　ユークリッド空間および双曲平面と擬等長同型なカンドルの例

本節では, 変位の群によるグラフから定まる距離が, ユークリッド空間および双曲平面と擬等長同型なカンドルの例を紹介する. Q の連結成分 O に $\mathrm{Dis}(Q)$ が自由に作用しているとき, 以下が成り立つ.

命題 4.1. Q を $\mathrm{Dis}(Q)$ が有限生成であるカンドルとする. Q の連結成分 O に $\mathrm{Dis}(Q)$ が自由に作用していると仮定する. このとき, $\mathrm{Dis}(Q)$ と O は擬等長同型である.

一般化アレクサンダーカンドルと, その変位の群に対して, [1] の議論によると以下が成り立つ.

補題 4.2 (cf.[1])**.** 群 G と, その自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して定まる一般化アレクサンダーカンドル $Q = \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ は次を満たす.

- 単位元 $e \in G$ を含む Q の連結成分 P は $\mathrm{Dis}(Q)$ と同型な G の部分群であり, 特に, P は Q に自由に作用する.
- ある $g \in G$ に関して, 内部自己同型写像 σ が $\sigma(x) = g^{-1}xg$ で与えられているとき, P は G における $\{g\}$ の正規閉包と同型である.

補題 4.2 より, 一般化アレクサンダーカンドルの変位の群は, 一般化アレクサンダーカンドルに自由に作用することがわかる. そこで, 一般化アレクサンダーカンドルを用いて, ユークリッド空間および双曲平面のそれぞれと擬等長同型となる 2 つの例を紹介する.

例 4.3. $t \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ に対して, 一般化アレクサンダーカンドル $Q := \mathrm{GAlex}(\mathbb{Z}^n, t)$ を考える. このとき, $\mathrm{Dis}(Q)$ は $(1-t)\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^k$ 同型である. ただし, $k = \mathrm{rank}(1-t)$ である. したがって, 命題 4.1 より Q の各連結成分は $\mathbb{Z}^k$ に擬等長同型であり, さらに $\mathbb{Z}^k$ はユークリッド空間 $\mathbb{E}^k$ と擬等長同型である. よって Q の各連結成分はユークリッド空間 $\mathbb{E}^k$ に擬等長同型である.

例 4.4. 以下の表示で定まる群 $\Delta^+(p,q,r)$ を考える.

$$\Delta^+(p,q,r) := \langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1 \rangle .$$

また，生成元 a に関する内部自己同型写像 σ を考える. つまり

$$\sigma(x) := a^{-1}xa.$$

このとき, 一般化 Alexander カンドル $Q := \mathrm{GAlex}\left(\Delta^+(p,q,r), \sigma\right)$ の変位の群 $\mathrm{Dis}(Q)$ は $\Delta^+(p,q,r)$ の有限指数部分群となる. 実際, ある全射準同型写像 $\Delta^+(p,q,r) \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ (ただし $k = \gcd(q,r)$) の核と一致する. したがって, $\mathrm{Dis}(Q)$ は有限生成となり, 命題 2.17 より $\Delta^+(p,q,r)$ と擬等長同型である. 特に, 条件

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \tag{1}$$

を満たすとき, $\Delta^+(p,q,r)$ は双曲平面 $\mathbb{H}^2$ と擬等長同型である. したがって, 条件 (1) のもとで Q の各連結成分は $\mathbb{H}^2$ と擬等長同型である.

参考文献

[1] Akihiro Higashitani and Hirotake Kurihara. Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations. *European Journal of Mathematics*, 10(3):41, 2024.

[2] Alexander Hulpke, David Stanovský, and Petr Vojtěchovský. Connected quandles and transitive groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(2):735–758, 2016.

[3] Yoshitaka Ishihara and Hiroshi Tamaru. Flat connected finite quandles. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(11):4959–4971, 2016.

[4] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 23(1):37–65, 1982.

[5] Seiichi Kamada. *Surface-Knots in 4-Space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Singapore, 2017.

[6] Clara Löh. *Geometric Group Theory: An Introduction*. Universitext. Springer, 2017.

[7] J. Meier. *Groups, Graphs and Trees: An Introduction to the Geometry of Infinite Groups*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2008.

[8] Steven Karl Winker. *QUANDLES, KNOT INVARIANTS, AND THE N-FOLD BRANCHED COVER*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984.

[9] 田丸 博士. 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part IV, 2019.